数理解析研究所講究録 1403 巻 2004 年 45-53

On biharmonic submanifolds

北海道大学　笹原徹 (Toru Sasahara)
Hokkaido University

概要

2 重調和関数が、弾性力学や流体力学において重要な役割を果たしていることはよく知られている。1964 年、Eells と Sampson がリーマン多様体間の写像に対して 2 重調和性という概念を導入した。これは、関数の 2 重調和性の自然な拡張となっている。本稿では、2 重調和等長はめ込みの構成法、分類結果等を紹介する。

1 Biharmonic maps

(M, g), $(N, \tilde{g})$ をリーマン多様体とし、$\phi : M \to N$ を滑らかな写像とする。$\tau(\phi)$ を ϕ のテンション場としたとき、M のコンパクト領域 Ω 上の bienergy $E_2(\phi; \Omega)$ は次のように定義される ([16])。

$$E_2(\phi; \Omega) = \int_\Omega \tilde{g}(\tau(\phi), \tau(\phi)) dv_g,$$

ここで、dv_g は M の体積要素である。

任意のコンパクト領域 $\Omega \subset M$ に対して ϕ が $E_2(\phi; \Omega)$ の臨界点となっているとき、ϕ を biharmonic（2 重調和）写像といい、そうなるための必要十分条件は次で与えられる ([21])。

$$\mathcal{J}_\phi(\tau(\phi)) = 0.$$

ここで $\mathcal{J}_\phi$ は、調和写像の第二変分公式に現れるヤコビ作用素である。この方程式から、調和写像は biharmonic であることがわかる。調和写像でない biharmonic 写像を proper biharmonic 写像と呼ぶ。

2 実空間形のbiharmonic部分多様体

ユークリッド空間の部分多様体がbiharmonicになるための必要十分条件は、平均曲率ベクトル場の各成分が調和関数となることである。これは、位置ベクトル場の成分が、それぞれbiharmonic関数になることと同値である。ユークリッド空間のbiharmonic部分多様体の研究はB.-Y.Chenによって始められた。

Theorem 1 **([11])** E^3 の *biharmonic* 曲面は極小曲面である。

ユークリッド空間内において、proper biharmonic部分多様体の例は今のところ見つかっていない。Chenは次の予想を提出している。

Conjecture 2 E^n の *biharmonic* 部分多様体は極小部分多様体である。

この予想は現在も未解決であるが、幾つかの部分的な（肯定的）解答が知られている。例えば、E^n のbiharmonic曲線、E^4 のbiharmonic超曲面に関してはこの予想は正しい。E^n 同様、双曲空間 H^n のproper biharmonic部分多様体も今のところ見つかっていない。

最近、Caddeo, Montaldo, Oniciucらにより球面内のbiharmonic部分多様体の研究が始められた。彼らは、3次元球面のproper biharmonic曲面と E^n のproper biharmonic曲線を完全に決定した。

Theorem 3 **([7])** 単位球面 $S^n(1)$ の *proper biharmonic* 曲線は次の二つである。

$$(i)\left(\frac{\cos at}{\sqrt{2}}, \frac{\sin at}{\sqrt{2}}, \frac{\cos bt}{\sqrt{2}}, \frac{\sin bt}{\sqrt{2}}, 0, \cdots, 0\right), \quad a^2 \neq b^2,$$
$$(ii)\left(\frac{\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \cdots, 0\right),$$

Theorem 4 **([6])** $S^3(1)$ の *proper biharmonic* 曲面は $S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$ のみである。

この結果とは対照的に、$S^n(n>3)$ 内のproper biharmonic部分多様体を次の方法で量産できる。

Proposition 5 **([6])** $f: M^m \to S^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ を極小はめ込みとし、$i: S^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \to S^n(1)$ を *totally umbilical* はめ込みとする。このとき、$i \circ f$ は *proper biharmonic* はめ込みである。

Proposition 6 **([1])** $g_1: M^m \to S^{p-1}(1)$ と $g_2: N^n \to S^{q-1}(1)$ を等長はめ込みとする．テンソル積はめ込み $g_1 \otimes g_2: M^m \times N^n \to S^{pq-1}(1)$ が *biharmonic* 等長はめ込みになるための必要十分条件は g_1 と g_2 が *biharmonic* となることである．

3 接触多様体のbiharmonic部分多様体

定理4で示したように、$S^3(1)$ の proper biharmonic 曲面は完全に決定されている。$S^3(1)$ は佐々木空間形の典型的な例であるので、次のステップとして一般の佐々木空間形の proper biharmonic 部分多様体を調べることが課題となる。接触多様体には二つの良い部分多様体のクラスがある。一つは、Reeb ベクトル場に直交しており、さらに概接触構造を作用させることにより、接空間と " 法空間 −span{Reeb ベクトル場 } " が入れ替わるようなものである。これを Legendre 部分多様体という。

もう一つは、Reeb ベクトル場に接しており、接空間に概接触構造を作用させると法空間に含まれるようなものである。そのようなものを anti-invariant 部分多様体という。概接触構造により接空間が不変であるようなものも良い部分多様体であるが、それらは極小であるので、今の場合は研究対象から外れる。

井ノ口氏は3次元佐々木空間形の proper biharmonic Legendre 曲線、proper biharmonic anti-invariant 曲面に関して以下の結果を得た。

Theorem 7 **([19])** γ を正則断面曲率 ϵ をもつ佐々木空間形 $\tilde{M}^3(\epsilon)$ の *proper biharmonic Legendre* 曲線とする。このとき $\epsilon > 1$ であり、γ は曲率 $\sqrt{\epsilon - 1}$、捩率 1 の *helix* である。このような曲線は $\tilde{M}^3(\epsilon)$ の剛性運動を除いて一意に定まる。

Theorem 8 **([19])** M^2 を佐々木空間形 $\tilde{M}^3(\epsilon)$ の *anti-invariant proper biharmonic* 曲面とする。このとき $\epsilon > 1$ であり、M^2 は平均曲率 $\frac{\sqrt{\epsilon-1}}{2}$ の曲面である。このような曲面は $\tilde{M}^3(\epsilon)$ の剛性運動を除いて一意に定まる。

次に、これらの結果の高次元版を作ることが目標となる。筆者は、5次元佐々木空間形の proper biharmonic Legendre 曲面と3次元 proper biharmonic anti-invariant 部分多様体の局所的な構造を決定した。外空間が3次元佐々木空間形の場合とは対照的に、単位球面内に proper なものが存在する。

Theorem 9 **([30])** M を佐々木空間形 $\tilde{M}^5(\epsilon)$ の *proper biharmonic Legendre* 曲面とする。そのとき $\epsilon \geq \frac{-11+32\sqrt{2}}{41}$ であり、任意の点 $p \in M$ に対して以下の条件を満たす局所座標系 $\{x, y\}$ が存在する。

(*i*) 計量が $g = dx^2 + dy^2$ で表される。

(*ii*) 第二基本形式が、

$$h(\partial_x, \partial_x) = \frac{\epsilon - 1}{\alpha}\phi\partial_x, \quad h(\partial_x, \partial_y) = \Big(\alpha - \frac{\epsilon - 1}{\alpha}\Big)\phi\partial_y,$$
$$h(\partial_y, \partial_y) = \Big(\alpha - \frac{\epsilon - 1}{\alpha}\Big)\phi\partial_x,$$

で表される。ここで、$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, ϕ は概接触構造,

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{\frac{13\epsilon-9\pm\sqrt{41\epsilon^2+22\epsilon-47}}{8}} & (\epsilon \neq 1), \\ 1 & (\epsilon = 1). \end{cases}$$

逆に、α を上記の定数とし、R^2 の単連結領域 V に計量 $g = dx^2 + dy^2$ を導入する。このとき、(V, g) から $\tilde{M}^5(\epsilon)$ への Legendre 等長はめ込みで、第二基本形式が (ii) の形であるようなものが（$\tilde{M}^5(\epsilon)$ の剛性運動を除いて）唯一つ存在する。さらに、このはめ込みは proper biharmonic である。

特に、$\tilde{M}(\epsilon) = S^5(1)$ のときは具体的にそのはめ込みを記述することが出来る。

Corollary 10 ([30]) $f : M \to S^5(1) \subset \mathbf{C}^3$ を *proper biharmonic Legendre* 曲面とする。このとき、f は次で表される。

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ix}, ie^{-ix}\sin\sqrt{2}y, ie^{-ix}\cos\sqrt{2}y).$$

ここで、f は2重周期であることに注意しておきたい。つまり、f はトーラスからの写像（の一部）である。また、

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ix}, 0, 0), \quad f_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, ie^{-ix}\sin\sqrt{2}y, ie^{-ix}\cos\sqrt{2}y)$$

とおくと、上記の f は $f = f_1 + f_2$ と表されるが、さらに、f_1, f_2 は $\Delta_M f_1 = f_1$, $\Delta_M f_2 = 3f_2$ を満たしている。ここで、Δ_M は M 上の関数に作用するラプラシアンであるが、今の場合は位置ベクトルの各成分に作用しているものとする。このように $f = f_1 + f_2$, $\Delta_M f_1 = \lambda_1 f_1, \Delta_M f_2 = \lambda_2 f_2$（ただし、$\lambda_1 \neq \lambda_2$）と分解されるようなユークリッド空間内の部分多様体は 2-type と呼ばれる。

$S^m(1)$ の極小曲面の E^{m+1} における位置ベクトル f は $\Delta_M f = 2f$ を満たす（高橋恒郎の定理)。このことから、系10の曲面 f は、スペクトル分解の観点から、極小曲面についで"良い"ものと考えられる。

今、$g_1(x) = (\cos x, \sin x)$, $g_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \sin\sqrt{2}y, \cos\sqrt{2}y)$ と置く。これらは biharmonic 曲線である（定理3）。系10の f は $f(x,y) = g_1 \otimes g_2$ のように tensor 積はめ込みで書けることに注意しておく。

Theorem 11 ([1]) M^3 を $\tilde{M}^5(\epsilon)$ の *proper biharmonic anti-invariant submanifold* とする。そのとき、$\epsilon \geq \frac{1+14\sqrt{2}}{23}$ であり、任意の点 $p \in M^3$ に対して以下の条件を満たす局所座標系 $\{x, y, z\}$ が存在する。

(*i*) $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$,
(*ii*)

$$h(\partial_x,\partial_x) = \frac{7(\epsilon-1)}{12\alpha}\phi\partial_x,\quad h(\partial_y,\partial_y) = \left(3\alpha - \frac{7(\epsilon-1)}{12\alpha}\right)\phi\partial_x,\quad h(\partial_z,\partial_z) = 0,$$
$$h(\partial_x,\partial_y) = \left(3\alpha - \frac{7(\epsilon-1)}{12\alpha}\right)\phi\partial_y,\quad h(\partial_x,\partial_z) = -\phi\partial_x,\quad h(\partial_y,\partial_z) = -\phi\partial_y,$$

ここで、

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\sqrt{11\epsilon-9\pm\sqrt{23\epsilon^2-2\epsilon-17}}}{6} & (\epsilon \neq 1), \\ \frac{1}{3} & (\epsilon = 1). \end{cases}$$

逆に、α を上記の定数とし、R^3 の単連結領域 V に計量 $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ を導入する。このとき、(V, g) から $\tilde{M}^5(\epsilon)$ への *anti-invariant* 等長はめ込みで、第二基本形式が (*ii*) の形をしているようなものが（$\tilde{M}^5(\epsilon)$ の剛性運動を除いて）唯一つ存在する。さらに、そのはめ込みは *proper biharmonic* である。

Corollary 12 ([1]) $f : M^3 \to S^5(1) \subset \mathbf{C}^3$ を *proper biharmonic anti-invariant* 等長はめ込みとする。そのとき、 M^3 の $\mathbf{C}^3$ 内での位置ベクトルは次で与えられる。

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ix}, ie^{-ix}\sin\sqrt{2}y, ie^{-ix}\cos\sqrt{2}y)e^{iz}. \tag{3.1}$$

系 10 の写像と同様に、トーラスからの写像（の一部）であり、さらに 2-type でもある。

Remark 13 球面の biharmonic 部分多様体が全て 2-type なわけではない。実際、Proposition 5 のように構成されたものは 2-type でない。

次に、佐々木空間形の proper biharmonic ルジャンドル部分多様体の安定性について述べる。今、部分多様体のベクトル場 X に対して、

$$F(X) := \langle h(X,X), H\rangle$$

とおく。ここで、H は平均曲率ベクトル場である。Legendre 曲線の場合には、$F(\phi\frac{H}{||H||})$ は曲率の 2 乗を表している。次元が 2 以上の場合には、一般には、平均曲率の 2 乗とはならないことに注意する。この $F(\phi\frac{H}{||H||})$ を用いて、佐々木空間形の proper biharmonic ルジャンドル部分多様体が不安定になるための十分条件がえられる。

Theorem 14 ([31]) $f: M^n \to \tilde{M}^{2n+1}(\epsilon)$ をコンパクト *proper biharmonic Legendre* 部分多様体とする。D を法接続、ξ を *Reeb* ベクトル場とする。もし、$DH||\xi$ で、さらに次の不等式が満たされているなら、f は不安定である。

$$(\epsilon+3)||H||^2 vol(M) + 3n(\epsilon-1)\int_M F\Big(\phi\frac{H}{||H||}\Big)dv_g > 0.$$

この定理から次のことが得られる。

Corollary 15 ([31]) 佐々木空間形の *proper biharmonic Legendre* 曲線、曲面は不安定である。

佐々木多様体は、曲率テンソル R が次の条件を満たすことで特徴付けられる。

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y,$$

ここで、η は接触形式である。

佐々木多様体を含む接触多様体のクラスとして、R が次の条件を満たすものが考えられる ([5], [22])。

$$R(X,Y)\xi = (\kappa I + \mu h)\,(\eta(Y)X - \eta(X)Y)\,,$$

ここで、$2h$ は、ξ による概接触構造のリー微分であり、κ, μ は関数である。このような接触多様体を (κ,μ) 多様体といい、$M(\kappa,\mu)$ で表す。この多様体のクラスを考える理由は二つある。一つは、佐々木多様体以外にも実空間形の球面束、$SU(2)$, $SL(2,R)$, ユークリッド運動群 $E(2)$, ミンコフスキー運動群 $E(1,1)$ といった良い接触多様体を含んでいることである。もう一つは、R の条件が接触接分布の共形変換 (D-homothetic deformation) により不変であるということである。

$M(\kappa,\mu)$ の次元が 5 以上の場合は、実は κ, μ は定数となることが知られている。3 次元の場合には、κ, μ が定数でない関数であるような (κ,μ) 多様体が存在する ([22])。また、3 次元接触多様体が (κ,μ) 多様体であるための必要十分条件は、Reeb ベクトル場が、その多様体から球面束への調和写像となることが、Perrone により示された ([29])。

これらのことから、3 次元 (κ,μ) 多様体は、接触多様体の中でも特に良いものであるといえる。次に示すように、定理 7,8 を、外空間が 3 次元 (κ,μ) 多様体の場合に拡張できる。

Proposition 16 ([2]) $\gamma: I \longrightarrow M^3(\kappa,\mu)$ を測地線でない *Legendre* 曲線とする. γ が *biharmonic* となるための必要十分条件は、γ が $\alpha^2+\tau^2 = \frac{1}{2}(\gamma^*S - 4\gamma^*\kappa)$ をみたす *helix* となることである。ここで、α, τ はそれぞれ曲率、捩率、また S は $M^3(\kappa,\mu)$ のスカラー曲率である。

Corollary 17 **([2])** $S \leq 4\kappa$ であるような 3 次元 (κ, μ) 多様体には、*proper biharmonic Legendre* 曲線は存在しない。

Theorem 18 **([2])** $f : M^2 \to N^3(\kappa, \mu)$ を平坦な非極小 *anti-invariant* 曲面とする。f が *biharmonic* になるための必要十分条件は、2 乗平均曲率が定数で、以下のいずれかに等しいことである。

$(a)\frac{1}{4}(f^*S - 6)$,

$(b)\frac{1}{4}(f^*S - 4f^*\kappa - f^*\mu)$.

Corollary 19 **([2])** $S \leq \mathrm{Min}\{6, 4\kappa + \mu\}$ をみたす 3 次元 (κ, μ) 多様体には、平坦な *proper biharmonic anti-invariant* 曲面は存在しない。

最後に、(κ, μ) 多様体の proper biharmonic Legendre 曲線、proper biharmonic anti-invariant 曲面の例を挙げる。

Examples:

$N^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_3 \neq 0\}$ とおく。3 個のベクトル場

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = -2x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2x_1}{x_3^3}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad e_3 = \frac{1}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

が、正規直交基で、e_1 が Reeb ベクトル場となるような接触計量構造を導入することが出来る。それらは $\kappa = 1 - \frac{1}{x_3^4}$, $\mu = 2(1 - \frac{1}{x_3^2})$ の (κ, μ) 多様体である。このとき、スカラー曲率は次で与えられる。

$$S = 2\left(-1 + \frac{2}{x_3^2} - \frac{1}{x_3^4} + \frac{3}{x_3^6}\right).$$

今、$\gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_3 = s,\ x_1 = \text{constant}\}$、$M^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_3 = t\}$ とおく。ここで、s と t は次の方程式の解である。

$$4s^6 - 4s^4 - 1 = 0,$$
$$8t^6 - 6t^4 - 2t^2 - 3 = 0.$$

このとき、γ は proper biharmonic Legendre 曲線であり、M^2 は (b) タイプの平均曲率をもつ、平坦な proper biharmonic anti-invariant 曲面である。

参考文献

[1] K. Arslan, R. Ezentas, C. Murathan and T. Sasahara, 3-*dimensional biharmonic anti-invariant submanifolds,* preprint.

[2] K. Arslan, R. Ezentas, C. Murathan and T. Sasahara, *Biharmonic submanifolds in 3-dimensional* (κ, μ)*-manifolds,* preprint.

[3] P. Baird and D. Kamissoko, *On constructing biharmonic maps and mertics*, Annals of Global Analysis and Geometry. **23** (2003) 65-75.

[4] M. Barros and O. J. Garay, *On submanifolds with harmonic mean curvature,* Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 2545-2549.

[5] D. E. Blair, T. Koufogiorgos and B. Papantoniou, *Contact metric manifolds satisfying a nullity condition,* Israel J. Math. **91** (1995) 189-214.

[6] R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* S^3, Internat. J. Math. **12** (2001), 867–876.

[7] R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. **130** (2002), 109-123.

[8] R. Caddeo, S. Montaldo and P. Piu, *On Biharmonic Maps*, Contemporary. Mathematics, **288** (2001), 286-290.

[9] R. Caddeo, S. Montaldo and P. Piu, *Biharmonic curves on a surface*, Rend. Math. **21** (2001), 143-157.

[10] R. Caddeo, C. Oniciuc, and P. Piu, *Explicit formulas for biharmonic non-geodesic curves of the Heisenberg group*, preprint.

[11] B.-Y. Chen, *A report on submanifolds of finite type,* Soochow J. Math. **22** (1996), 117-337.

[12] B. Y. Chen and S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces,* Kyusyu J. Math. **52** (1998), 167-185.

[13] F. Defever, *Hypersurfaces of* E^4 *with harmonic mean curvature vector,* Math. Nachr. **196** (1998) 61-69.

[14] I. Dimitric, *Submanifolds of* E^m *with harmonic mean curvature vector,* Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. **20** (1992) 53-65.

[15] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109-160.

[16] J. Eells and J. H. Sampson, *Variational theory in fibre bundles*, Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry (Kyoto 1965), pp. 22–33.

[17] A. Ferrández, P. Lucas and M. A. Meroño, *Biharmonic Hopf cylinders,* Rocky Mountain J. Math. **28** (1998), 957-975.

[18] T. Hasanis and T. Vlachos, *Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field,* Math. Nachr. **172** (1995) 145-169.

[19] J. Inoguchi, *Submanifolds with harmonic mean curvature vector field in contact* 3-*manifolds,* Colloq. Math, to appear.

[20] G. Y. Jiang, 2-*harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds* (Chinese), Chinese Ann. Math. A **7** (1986) 130–144.

[21] G. Y. Jiang, 2-*harmonic maps and their first and second variational formulas.* (Chinese), Chinese Ann. Math. A **7** (1986), 389–402.

[22] T. Koufogiorgos and C. Tsichlias, *On the existence of a new class of contact metric manifolds,* Canadian Math. Bull. **43** (2003) 440-447.

[23] E. Loubeau and C. Oniciuc, *The index of biharmonic maps in spheres,* Math. DG/0303160.

[24] E. Loubeau and C. Oniciuc, *On biharmonic and harmonic indices of the Hopf map,* Math. DG/0402295.

[25] E. Loubeau and C. Oniciuc, *Biminimal immersions in space forms,* Math. DG/0405320.

[26] C. Oniciuc, *On the second variation formula for biharmonic maps to a sphere,* Publ. Math. Debrecen. **61** (2002), 613-622.

[27] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds,* to appear in An. Stiint. Univ. AI. I. Cuza, Iasi. Mat. (N.S.).

[28] C. Oniciuc, *New examples of biharmonic maps in spheres,* Colloq. Math. **97** (2003), 131-139.

[29] D. Perrone, *Harmonic characteristic vector fields on contact metric three-manifolds,* Bull. Austral. Math. Soc. **67** (2003) 305-315.

[30] T. Sasahara, *Legendre surfaces in Sasakian space forms whose mean curvature vectors are eigenvectors,* to appear in Pub. Math. Debrecen.

[31] T. Sasahara, *Stability of biharmonic Legendre submanifolds in Sasakian space forms,* preprint.

E-mail address : `t-sasa@math.sci.hokudai.ac.jp`